2.1.8 Lineární funkce I

Předpoklady: 2104, 2105

Př. 1: Celková kapacita přehradní nádrže Orlík je $780000000\ \text{m}^3$. Na začátku povodní bylo v nádrži $500000000\ \text{m}^3$. Každou sekundu přiteče do přehrady $4000\ \text{m}^3$. Odtok z přehrady je $1000\ \text{m}^3/\text{s}$.
Spočti, kolik vody přibude do přehrady za 1s, 1 minutu, 1h.
Kolik vody bude v nádrži za 1 hod, 2 hod, 5 hod, 10 hod, 1den?
Najdi funkci, která udává závislost množství vody v přehradě (v miliónech m^3) na čase udávaném v hodinách. Urči její definiční obor a obor hodnot. Narýsuj graf této funkce.
Za jak dlouho bude přehrada plná?

Výpis známých veličin:

- Celkový objem: $V_c = 780000000\ \text{m}^3 = 780\,\text{mil}\ \text{m}^3$.
  Zaplněný (počáteční) objem: $V_0 = 500000000\ \text{m}^3 = 500\,\text{mil}\ \text{m}^3$.
- Přítok $P = 4000\ \text{m}^3$.
- Odtok $O = 1000\ \text{m}^3$.

Za 1s přibude 3000 m^3.
Za 1 minutu přibude $60 \cdot 3000 = 180000\ \text{m}^3$.
Za 1 hodinu přibude $60 \cdot 60 \cdot 3000 = 10800000\ \text{m}^3 = 10,8\ \text{mil}\ \text{m}^3$.

Objem vody v přehradě za 1 hodinu $V = 500 + 1 \cdot 10,8 = 510,8\ \text{mil}\ \text{m}^3$.
Objem vody v přehradě za 2 hodiny $V = 500 + 2 \cdot 10,8 = 521,6\ \text{mil}\ \text{m}^3$.
Objem vody v přehradě za 5 hodin $V = 500 + 5 \cdot 10,8 = 554\ \text{mil}\ \text{m}^3$.
Objem vody v přehradě za t hodin $V = 500 + t \cdot 10,8\ \text{mil}\ \text{m}^3$.

Další výsledky jsou v tabulce.

čas [hodiny]	0	1	2	5	10	24
objem vody [$\text{mil}\ \text{m}^3$]	500	510,8	521,6	554	608	759,2

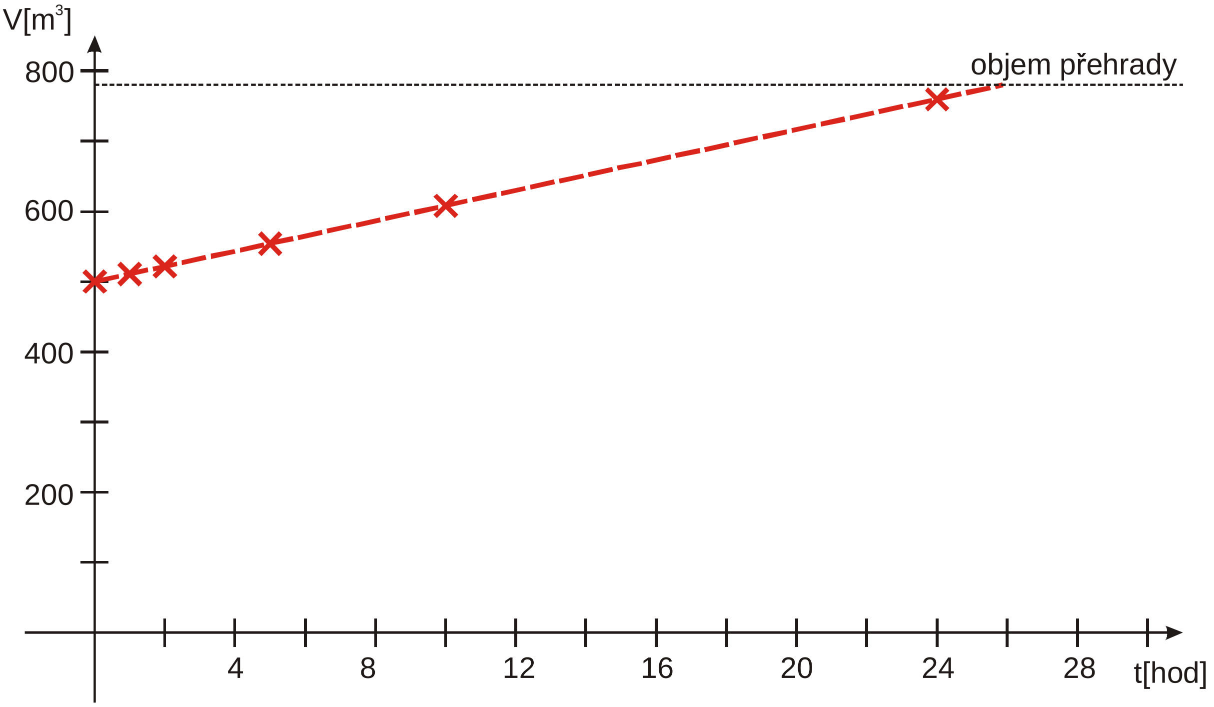
Funkce udávající závislost množství vody v přehradě na čase: $V = 500 + t \cdot 10,8$.
Matematický zápis: $y = 10,8x + 500$.

Přehrada bude plná až v ní bude $780\ \text{mil}\ \text{m}^3$ vody ($V = V_c$).

$$780 = 500 + t \cdot 10,8$$
$$10,8t = 780 - 500$$
$$t = \frac{280}{10,8} = 25,92\ \text{hod} \doteq 26\ \text{hod}$$

Teď určíme $D(f) = \langle 0; 25,92 \rangle$ (jakmile přehrada přeteče, naše funkce přestane platit).

$H(f) = \langle 500; 780 \rangle$



Pedagogická poznámka: Studenti jsou schopni buď samostatně nebo s malou pomocí příklad postupně řešit. Spolupráce u tabule je potřeba spíše jen u sestavování funkčního předpisu a určování definičního oboru a oboru hodnot.

Údaje jsou reálné. Podle povodí Vltavy kulminoval přítok do Orlické přehrady 13.8.2002 při hodnotě $4400\ \text{m}^3/\text{s}$. Maximální objem Orlické přehrady je potvrzen z více zdrojů, přesný objem vody v přehradě na začátku povodní jsem nenašel, použil jsem údaj o normálním objemu nádrže.

Z příkladu je (na základě údajů poskytovaných Povodím Vltavy) vidět, že **v případě velkých povodní nemá Vltavská kaskáda jako ochranný prvek valný význam** (jak se zcela přesvědčivě ukázalo v srpnu 2002).
Někteří odborníci dokonce tvrdí, že situaci v Praze zhoršuje tím, že zatímco v minulosti povodňová vlna ze Šumavy dorazila do Prahy oproti Berounce se zpožděním (díky delšímu toku Vltavy a členitému korytu v místech, kde dnes stojí přehrady), v současnosti kulminují obě řeky téměř najednou a tím zhoršují stav pod svým soutokem.
V historii uchránila Vltavská kaskáda Prahu před velkou povodní pouze jednou a to v roce 1954, kdy povodňová vlna naplnila dokončovanou Slapskou přehradu (za několik dní místo původně plánovaných několika měsíců).

Z předchozího vyplývá, že přehrady mohou chránit před velkou povodní pouze v případě, že nejsou napuštěny vůbec nebo málo. Ve skutečnosti je to u přehrad přesně obráceně, protože jejich součástí jsou také vodní elektrárny a množství vyrobené energie je přímo úměrné výšce hladiny (a tedy i napuštění přehrady). Správce přehrady je tím motivován k tomu, aby přehrada byla připravena zadržovat pouze minimální množství povodňové vody.

Nezbývá než opravit učebnice vlastivědy. Přehradní nádrže slouží:

- k výrobě elektřiny,

- k rekreaci,
- jako zdroj práce pro stavební firmy.

Jako ochrana před povodní slouží přehrady pouze v případě, že povodeň není příliš vážná.

Neznám lepší ospravedlnění matematiky (a vzdělání vůbec) než podobné případy. V dnešní době, kdy už v podstatě neexistuje „stavovská čest“ a není problém sehnat úplatného „odborníka“, který bude ochoten veřejně tvrdit v podstatě cokoliv (snad nejkrásnějším příkladem je výstup hygienika najatého majitelem prodejen obviněných za prodej zkaženého masa. Podle denního tisku před soudem s vážnou tváří tvrdil, že zelené zbarvení zkaženého masa není na závadu, neboť po omytí a tepelné úpravě je možné jej bez obav konzumovat).

Svoboda informací není v těchto případech řešením, protože na většinu problémů je možné nalézt množství zcela protichůdných závěrů a zdůvodnění, prezentovaných zájmovými skupinami, které sledují v problematice své vlastní zájmy. Každý si nakonec musí z těchto informací vybrat sám, podle svého rozumu.

Až překvapivě mnoho takových situací je možné rozhodnout selským rozumem pomocí středoškolských znalostí (a často tak ušetřit peníze, námahu nebo zdraví).

Př. 2: Vyřeš předchozí příklad pro následující pozměněné situace:
a) na začátku povodně je nádrž zcela prázdná,
b) přítok do nádrže je pouze $2000\ \mathrm{m^3/s}$,
c) přítok do nádrže je pouze $1000\ \mathrm{m^3/s}$, odtok je $2000\ \mathrm{m^3/s}$,
d) na začátku povodně bylo v přehradě $650\ \text{mil}\ \mathrm{m^3}$.
Nakresli grafy všech případů do jednoho obrázku.

a) na začátku povodně je nádrž zcela prázdná

Za 1 hodinu přibude $60\cdot 60\cdot 3000 = 10800000\ \mathrm{m^3} = 10,8\ \text{mil}\ \mathrm{m^3}$.

Objem vody v přehradě za 1 hodinu $V = 1\cdot 10,8 = 10,8\ \text{mil}\ \mathrm{m^3}$.

Objem vody v přehradě za t hodin $V = t\cdot 10,8\ \text{mil}\ \mathrm{m^3}$.

čas [hodiny]	0	1	2	5	10	24
objem vody [$\text{mil}\ \mathrm{m^3}$]	0	10,8	21,6	54	108	259,2

Zápis funkce: $y = 10,8x$.

V grafu vyznačeno modře.

Přehrada bude plná až v ní bude $780\ \text{mil}\ \mathrm{m^3}$ vody ($V = V_c$).

$780 = t\cdot 10,8$

$t = \dfrac{780}{10,8} = 72,22\ \text{hod} \doteq 72\ \text{hod} \quad \Rightarrow \quad D(f) = \langle 0; 72,22\rangle$

$H(f) = \langle 0; 780\rangle$

b) přítok do nádrže je pouze $2000\ \mathrm{m^3/s}$.

Za 1 hodinu přibude $60\cdot 60\cdot (2000-1000) = 3600000\ \mathrm{m^3} = 3,6\ \text{mil}\ \mathrm{m^3}$.

Objem vody v přehradě za 1 hodinu $V = 500 + 1\cdot 3,6 = 503,6\ \text{mil}\ \mathrm{m^3}$.

Objem vody v přehradě za t hodin $V = 500 + t\cdot 3,6\ \text{mil}\ \mathrm{m^3}$.

čas [hodiny]	0	1	2	5	10	24

objem vody [mil m^3]	500	503,6	507,2	518	536	586,4

Zápis funkce: $y = 3,6x + 500$.
V grafu vyznačeno zeleně.
Přehrada bude plná až v ní bude 780 mil m^3 vody ($V = V_c$).

$780 = 500 + t \cdot 3,6$

$t = \frac{280}{3,6} = 77,77 \text{ hod} \doteq 78 \text{ hod} \Rightarrow D(f) = \langle 0; 77,77 \rangle$

$H(f) = \langle 500; 780 \rangle$

c) přítok do nádrže je pouze $1000 \text{ m}^3/\text{s}$ **, odtok je** $2000 \text{ m}^3/\text{s}$ **.**

Za 1 hodinu přibude $60 \cdot 60 \cdot (1000 - 2000) = -3600000 \text{ m}^3 = -3,6 \text{ mil m}^3$ (voda ubývá)

Objem vody v přehradě za 1 hodinu $V = 500 - 1 \cdot 3,6 = 496,4 \text{ mil m}^3$.

Objem vody v přehradě za t hodin $V = 500 - t \cdot 3,6 \text{ mil m}^3$.

čas [hodiny]	0	1	2	5	10	24
objem vody [mil m^3]	500	496,4	492,8	482	464	413,6

Zápis funkce: $y = -3,6x + 500$.
V grafu vyznačeno žlutě.
Přehrada bude prázdná až v ní bude 0 m^3 vody.

$0 = 500 - t \cdot 3,6$

$t = \frac{500}{3,6} = 138,88 \text{ hod} \doteq 139 \text{ hod} \Rightarrow D(f) = \langle 0; 138,88 \rangle$

$H(f) = \langle 0; 500 \rangle$

d) na začátku povodně bylo v přehradě 650 mil m^3

Za 1 hodinu přibude $60 \cdot 60 \cdot 3000 = 10800000 \text{ m}^3 = 10,8 \text{ mil m}^3$.

Objem vody v přehradě za 1 hodinu $V = 650 + 1 \cdot 10,8 = 660,8 \text{ mil m}^3$.

Objem vody v přehradě za t hodin $V = 650 + t \cdot 10,8 \text{ mil m}^3$.

čas [hodiny]	0	1	2	5	10	24
objem vody [mil m^3]	650	660,8	671,6	704	758	

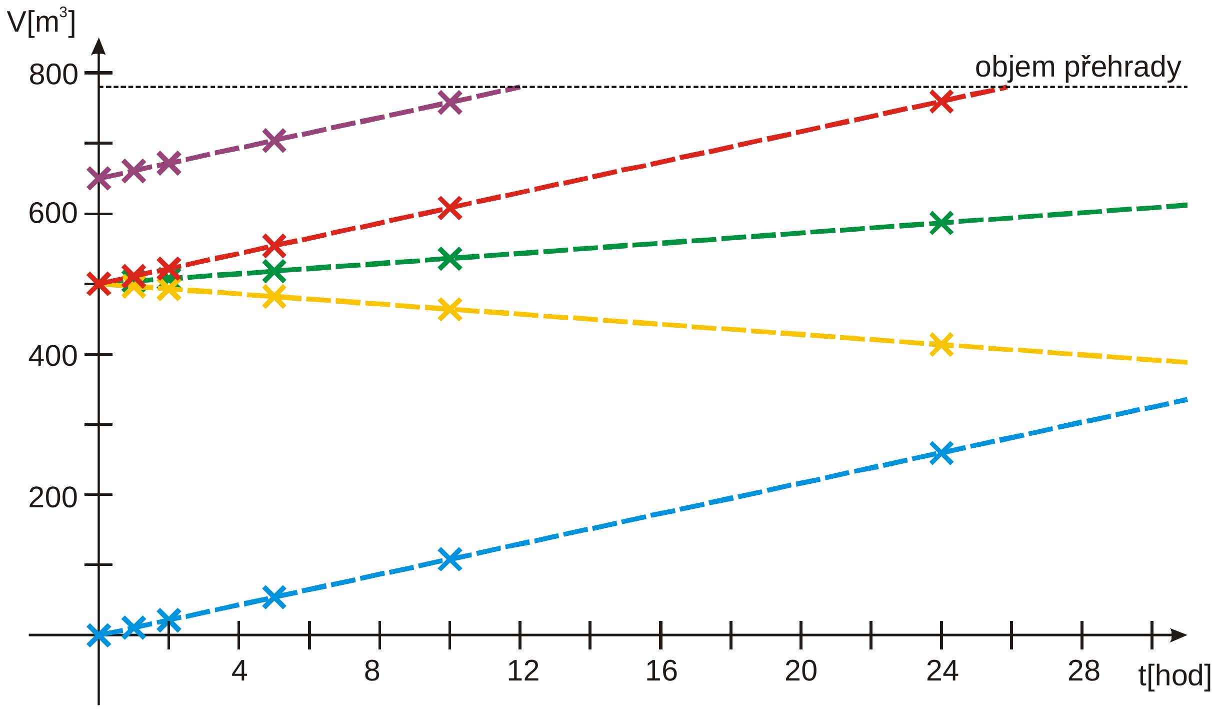
Zápis funkce: $y = 650 + 10,8x$.
V grafu je vyznačeno fialově.
Přehrada bude plná až v ní bude 780 mil m^3 vody ($V = V_c$).

$780 = 650 + t \cdot 10,8$

$t = \frac{130}{10,8} = 12,04 \text{ hod} \doteq 12 \text{ hod} \Rightarrow D(f) = \langle 0; 12,04 \rangle$

$H(f) = \langle 650; 780 \rangle$

Od 12. hodiny výsledný objem přesahuje objem přehrady a nemá tudíž smysl počítat podle funkce objem vody v přehradě.



Pedagogická poznámka: Spočítat celý příklad 2 o hodině většinou nestihne nikdo. Nechávám studenty, aby si příklad dobrovolně dopočítali doma (ty co to udělají, odměním plusem) a kontrolu provádíme na začátku příští hodiny. Rozbor grafů je prvním příkladem příští hodiny.

Shrnutí: Matematika může být užitečná, když si chceme udělat na něco svůj názor.